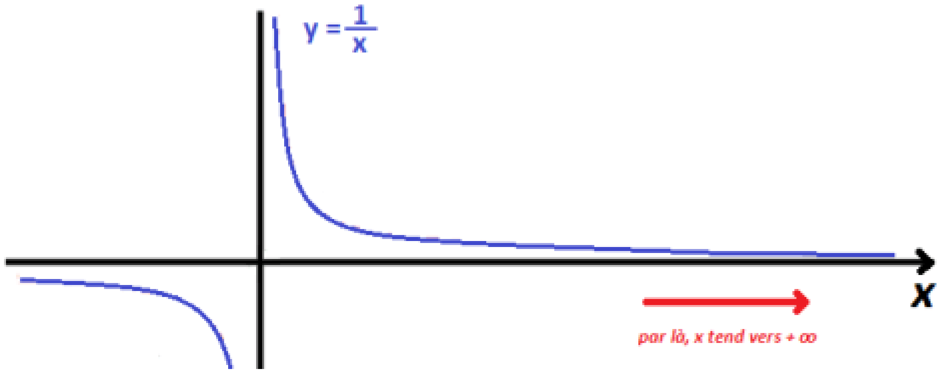
Chapitre 1 : **Les limites**

Introduction
La limite est une notion nouvelle en 1ère, mais c'est assez simple, il suffit de connaitre quelques règles.
Retiens bien ce qui suit car on se sert très souvent de la limite, notamment dans les études de fonctions.

Notion de limite
La limite d'une fonction, c'est en gros « vers quoi tend » la fonction.
Le plus simple est de prendre un exemple : la fonction inverse :



On voit bien que quand x tend vers +∞, la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 sans jamais la toucher.
Et bien on appelle cela une limite, puisque la fonction « tend vers » quelque chose.
On note cette limite de la façon suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Et on prononce cela « limite quand x tend vers plus l'infini de 1 sur x égal 0 ».

Pour l'instant retiens juste la notation et cette notion de « tendre vers », de toute façon au fur et à mesure de la leçon tu assimileras de mieux en mieux le concept de limite avec les exemples.

Calcul de limites

Haut de page

Nous allons maintenant voir comment calculer des limites.
Déjà une limite peut se calculer pour tous les x, c'est-à-dire que le x peut tendre vers -∞, -9, 4, ½, π, 0, +∞, etc…

En gros, pour calculer une limite, on remplace le x dans la fonction par vers quoi il tend.
Exemple :
Si on veut calculer :

$$\lim_{x \to 4} 2x - 7$$

Et bien on remplace tout simplement le x par 4 :

$$\lim_{x \to 4} 2x - 7 = 2 \times 4 - 7 = 8 - 7 = 1$$

Un autre exemple :

$$\lim_{x \to -6} \sqrt{x^2 - 11} = \sqrt{(-6)^2 - 11} = \sqrt{36 - 11} = \sqrt{25} = 5$$

Comme tu le vois il n'y a aucune difficulté, on remplace le x et on calcule !

Bon ça ce sont des cas simples, mais ce n'est pas tout le temps comme ça.
Reprenons notre exemple de tout à l'heure :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$$

On devrait écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty}$$

Oui mais

$\frac{1}{+\infty}$ CE N'EST ABSOLUMENT PAS MATHEMATIQUE !!!

Il ne faut JAMAIS écrire 1/∞ dans une copie, ce sera immédiatement rayé par le correcteur !!

En revanche sur un brouillon tu peux tout à fait l'écrire.
De même, si on cherche la limite en 0, on devrait écrire :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0}$$

Or tu sais très bien qu'ON NE DIVISE JAMAIS PAR 0 !!!
Il est également absolument faux d'écrire 1/0, n'écris jamais ça dans ta copie !!

Alors comment faire ?
Et bien c'est simple, il y a 2 formules à retenir, mais au brouillon, IL NE FAUT SURTOUT PAS LES ECRIRE SUR UNE COPIE :

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{0} = \infty$$

Ces formules sont très simples à retenir :
Pour la 1ère, c'est comme si tu avais un gâteau que tu divisais en une infinité de part. Tu peux donc imaginer que les parts seront microscopiques, ce qui donne 0.
Pour la 2ème, c'est comme si tu avais un gâteau que tu divisais en faisant des parts minuscules, tu auras donc une infinité de part, d'où l'infini.

Tu as remarqué que nous n'avons pas précisé $+\infty$ ou $-\infty$, nous avons juste mis ∞.
Nous reviendrons plus tard sur ce détail de signe, tu verras que c'est très simple.

Ainsi, on écrit directement :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

car on sait que $1/\infty = 0$, mais ça c'est dans ta tête ou sur le brouillon que tu l'écris, pas sur ta feuille…

Evidemment tu auras des fonctions plus compliquées que 1/x, nous allons maintenant voir comment s'en sortir.
Ne t'inquiète pas, nous ferons des exemples plus tard

Limite de somme, produit et quotient

Haut de page

Quand on a une somme de 2 fonctions c'est très simple : on additionne les limites !
Généralement il n'y a pas de souci, et souvent les limites se « simplifient ».

En effet, si f tend vers +∞ et g vers 4 par exemple, f + g tendra vers +∞, le 4 étant négligeable.

Pour les produits et les quotients c'est pareil, on multiplie les limites des 2 fonctions et on les divise les limites des 2 fonctions !

Il y a cependant quelques règles simples à retenir un peu comme 1/0 = ∞ et 1/∞=0 :

$$+\infty + \infty = +\infty$$

$$-\infty - \infty = -\infty$$

$$\infty \times \infty = \infty$$

$$l \times \infty = \infty$$

avec l réel DIFFERENT DE 0 !!

Toutes ces règles sont extrêmement logiques en y réfléchissant un peu. Tu n'es donc pas obligé de les apprendre par coeur, essaye plutôt de comprendre la logique de ces formules.

Haut de page

Tu as remarqué que parfois nous n'avons pas parlé du signe de la limite, nous avons laissé ∞ sans préciser + ou -.

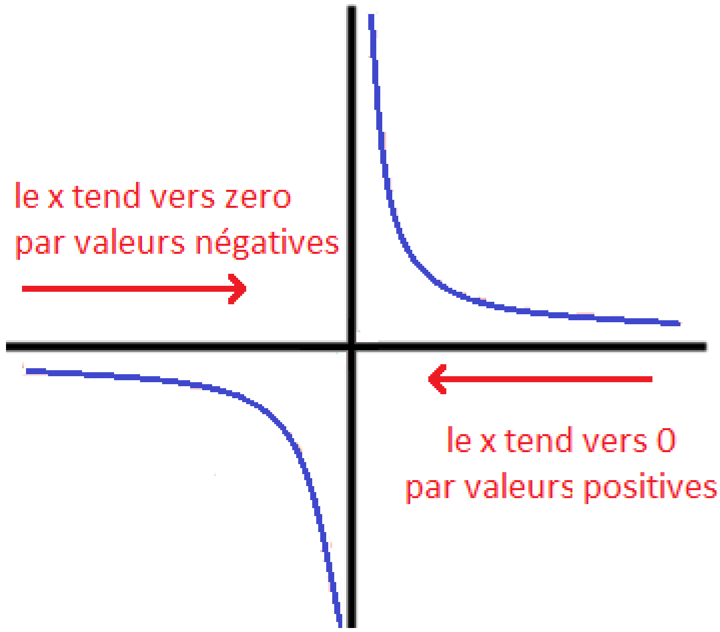
En fait c'est comme pour un calcul normal, on applique la règle des signes !!

Exemple : on veut calculer

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Ca devrait donner 1/0, et donc l'infini.
Oui mais + ou – ??
Et bien tout dépend si le 0 est positif ou négatif… mais on sait que le 0 n'est ni positif ni négatif !
Mais comment va-t-on faire ??

En fait, ce n'est pas vraiment 0, c'est le x qui tend vers 0. Tout dépend alors si le x tend vers 0 en venant des valeurs négatives ou positives :



On voit que le x peut tendre vers 0 de 2 manières : par valeurs négatives (en venant de la gauche) ou positives (en venant de la droite).
Il y a donc 2 cas à traiter, qui s'écrivent de la manière suivante :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x}$$

et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x}$$

On rajoute x > 0 si x tend vers 0 par valeurs positives, et x < 0 si x tend vers 0 par valeurs négatives.
On écrit également :

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x}$$

et

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$$

Cela revient au même, 0^+ signifie x > 0, et 0^- signifie x < 0.
Et là on peut calculer :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

car 1 et 0^+ sont positifs

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

car 1 est positif et 0^- négatif, donc c'est négatif

Comme tu le vois il suffit d'appliquer la règle des signes !!
Evidemment il ne faut PAS écrire

$$\frac{1}{0^-} et \frac{1}{0^+}$$

sur la copie, ici c'est juste pour t'expliquer !!
Comme tout à l'heure tu donnes directement le résultat : $+\infty$ ou $-\infty$.
A noter que ceci est bien cohérent avec le graphique de la fonction inverse ci-dessus (heureusement !!).

Evidemment, on peut faire de même pour

$$\lim_{x \to 7} \frac{1}{x-7}$$

ou

$$\lim_{x \to -3} \frac{1}{x+3}$$

puisqu'à chaque fois le dénominateur vaudra 0.

Enfin une dernière remarque, cette histoire de 0^+ et 0^- peut également s'appliquer à la limite elle-même.
Tout à l'heure, on a dit que :

$$\frac{1}{\infty} = 0$$

En fait on pourrait aller plus loin en disant que

$$\frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$$\frac{1}{-\infty} = 0^-$$

Cela nous permettrait de calculer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

Ceci est bien cohérent avec la courbe de la fonction inverse, puisqu'en -∞ la fonction est sous l'axe des abscisses, donc négative (d'où le 0^-), alors qu'en +∞ la fonction est au-dessus de l'axe des abscisses, donc positive (d'où le 0^+)
Formes indéterminées

Haut de page
Malheureusement ce n'est pas toujours aussi simple, il y a parfois ce qu'on appelle des formes indéterminées, souvent notées FI.
On est dans ce cas quand on a par exemple une somme de fonctions, l'une tendant vers +∞, l'autre vers -∞.

Ca nous donnerait +∞ + (-∞), mais quel est le résultat ??
Et bien on ne sait pas, cela ne correspond à aucune formule précédente : c'est une forme indéterminée.

Il y a en tout 4 formes indéterminées :

$$+\infty - \infty$$

$$0 \times \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{0}{0}$$

Quand on tombe sur une forme de ce type, on ne peut pas calculer la limite.
Mais cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de limite !!

Pour calculer ces limites, il faut appliquer d'autres théorèmes ou astuces, que l'on va voir tout de suite.

Théorème du plus haut degré

Haut de page
Quand on a des polynômes, on peut tomber sur des formes indéterminées.
Exemple :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x = +\infty - \infty = ?$$

c'est une forme indéterminée

Alors comment faire ?
Et bien c'est très simple :

La limite d'un polynome en ∞ est celle de son terme de plus haut degre

Exemples :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - x = \lim_{x \to +\infty} x^2$$
$$\lim_{x \to +\infty} 3x^7 - 5x^5 + 6x = \lim_{x \to +\infty} 3x^7$$
$$\lim_{x \to -\infty} -8x^{12} + 9x^5 + 8x^4 - 7 = \lim_{x \to -\infty} -8x^{12}$$

Comme tu le vois c'est extrêmemt simple

ATTENTION !! Ceci n'est valable que quand x tend +∞ ou -∞ !!!

L'intérêt, c'est que ce théorème marche aussi pour les fractions rationnelles !!! Ce qui permet grandement de simplifier les problèmes.
On rappelle que les fractions rationnelles sont des fractions avec un polynôme au numérateur et un autre polynôme au dénominateur.
Exemples :

Attention ! Il faut absolument laisser les coefficients des termes du plus haut degré !!
Dans le dernier exemple, c'est le 8 du $8x^7$ et le -9 du $-9x^5$.
En effet, on remarque dans cet exemple qu'ils ont une influence avec leur signe, puisqu'à la fin on applique la règle des signes.
Dans l'exemple, le $8x^2$ tend vers $+\infty$, mais le -9 fait changer le signe et le résultat est donc au final $-\infty$.

Une fois de plus, bien faire attention que ce résultat n'est vrai que en $+\infty$ ou $-\infty$!!

Il faut que tu saches également qu'il y a une autre technique pour calculer les limites des fractions rationnelles : on factorise par le plus haut degré !
Reprenons un des exemples précédents :

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{x^3(9-\frac{6}{x^3}+\frac{7}{x^5})}$$

On voit ici tout l'intérêt de factoriser : on se retrouve avec plein de fractions qui tendent vers 0 !!
En effet :

Et on a donc :

ce qui est exactement le résultat que l'on avait obtenu avec le théorème du plus haut degré.

Evidemment, il ne faut pas factoriser mais appliquer le théorème du plus haut degré directement, mais parfois on te demande explicitement d'appliquer cette méthode.

Ces exercices sur le théorème du plus haut degré te permettront d'être au top à ce niveau-là 😉
Théorèmes de comparaison et des gendarmes

Haut de page

Les théorèmes de comparaison sont très simples car, comme beaucoup de choses avec les limites, c'est très logique !

On suppose que l'on a 2 fonctions f et g telles que :

$$f(x) \leq g(x)$$

On a alors :

$$Si \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$
$$alors \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$$

Ce qui est normal, puisque g est plus grand que f qui tend +∞, et plus grand que +∞ c'est… +∞ !

De même :

$$Si \lim_{x \to a} g(x) = -\infty$$
$$alors \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Pour la même raison : puisque f est plus petit que g qui tend -∞, et plus petit que -∞ c'est… -∞ !

Le a peut être n'importe quoi, un réel comme +∞ ou -∞.

Dans le même ordre d'idée, il est possible de passer à la limite dans une inégalité :

$$Si f(x) \leq g(x)$$

alors

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Et enfin, une dernière chose qui y ressemble : le théorème des gendarmes ! C'est très simple :

$$Si\, h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

et si

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = k$$

alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = k$$

Ce qui est logique puisque f est compris entre h et g qui tendent tous les 2 vers k, donc il est un peu obligé de tendre vers k…

ATTENTION !! Il faut bien que h et g tendent vers la même limite…

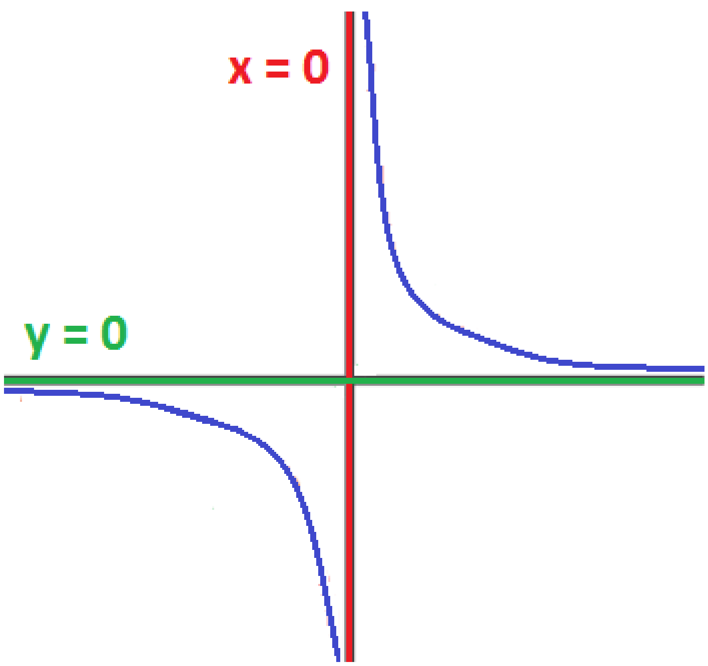
Remarque : cela s'appelle le théorème des gendarmes car f est compris entre h et g comme si c'était un prisonnier encadré par 2 gendarmes… mais ça n'a aucune importance de savoir ça, c'est juste pour que tu saches d'où ça vient^^

Asymptotes

Haut de page

Il y a une dernière application importante des limites : les asymptotes.

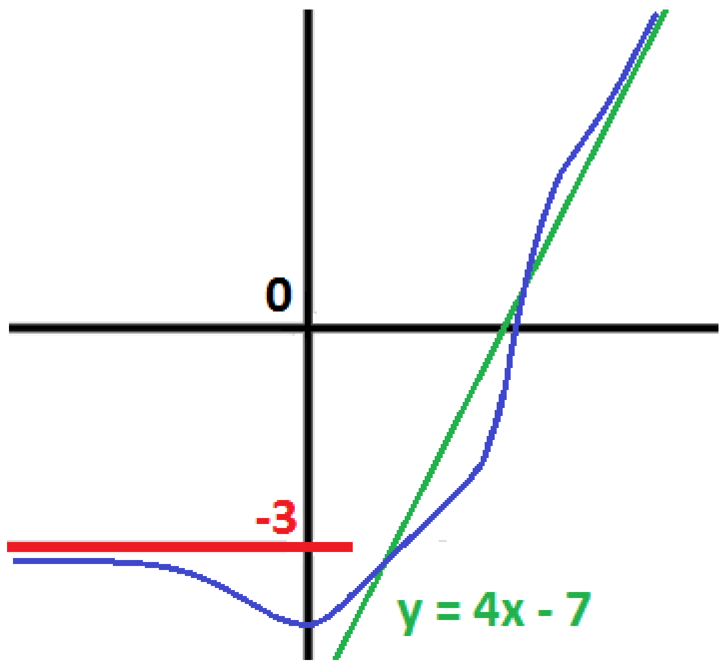
Déjà, qu'est-ce-qu'une asymptote ?
C'est une droite vers laquelle tend une fonction, autrement dit la fonction va longer la droite dans une certaine zone.
Reprenons l'exemple de la fonction inverse :



On voit clairement qu'en 0, la courbe tend vers l'axe des ordonnées, qui est une droite d'équation x = 0.
Cette droite d'équation x = 0 est donc une asymptote.

De même en +∞ et en -∞, la courbe de 1/x tend vers l'axe des abscisses, qui est une droite horizontale d'équation y = 0.
Cette droite d'équation y = 0 est donc également une asymptote.

Il peut donc y avoir des asymptotes horizontales ou verticales, mais il peut aussi y avoir des asymptotes obliques !!



En -∞, on voit qu'il y a une asymptote horizontale d'équation y = -3.
Mais en +∞, il y a une asymptote OBLIQUE, d'équation y = 4x – 7. On voit bien en effet que la courbe f en bleu va longer la courbe verte et s'en rapprocher de plus en plus.

Bon c'est bien joli tout ça mais un graphique n'a jamais été une démonstration, il faut maintenant voir comment prouver mathématiquement qu'une droite est asymptote à une fonction.

Il y a alors 3 formules à connaître, une par type d'asymptote :

Asymptote horizontale

$$Si \lim_{x \to +\infty} f(x) = k$$

alors

$$\text{La droite d'equation } y = k \text{ est asymptote horizontale a } f \text{ en } +\infty$$

On a évidemment la même propriété en -∞.

Asymptote verticale

$$Si \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

alors

$$\text{La droite d'equation } x = x_0 \text{ est asymptote verticale a } f \text{ en } x_0$$

Le x_0 peut être n'importe quel réel mais pas +∞ ou -∞ !!

Asymptote oblique

$$Si \lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$$

alors

$$\text{La droite d'equation } y = ax+b \text{ est asymptote oblique a } f \text{ en } +\infty$$

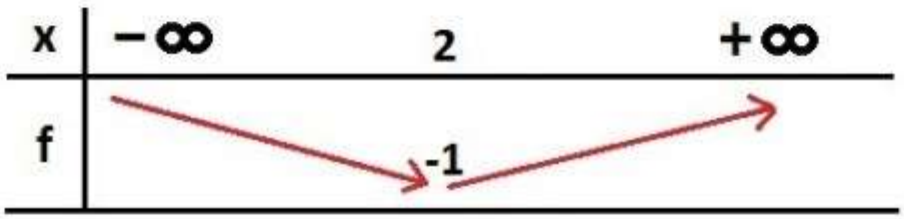
Là aussi on a la même propriété en -∞.

Avec l'habitude ces formules te sembleront évidentes, ce pourquoi l'entraînement est très important, comme pour toutes les prorpiétés que l'on a vu précédemment.
Ces exercices sur les asymptotes te permettront de te familiariser un peu plus avec cette dernière notion.
Compléter un tableau de variations

Haut de page

Ici nous n'introduirons pas de nouvelles formules rassure-toi
Nous te signalons juste que les limites permettent de compléter les tableaux de variations.

Prenons par exemple le tableau de variation de f(x) = x^2 -4x + 3 :



car f(2) = -1

Normalement tu as déjà l'habitude de compléter avec les valeurs comme ici le -1 car f(2) = -1.
Mais en +∞ et -∞ ?
Il ne faut bien sûr par mettre f(+∞) et f(-∞), ce n'est mathématiquement pas correct.
A la place, on va mettre… la limite de f en +∞ et -∞ !!

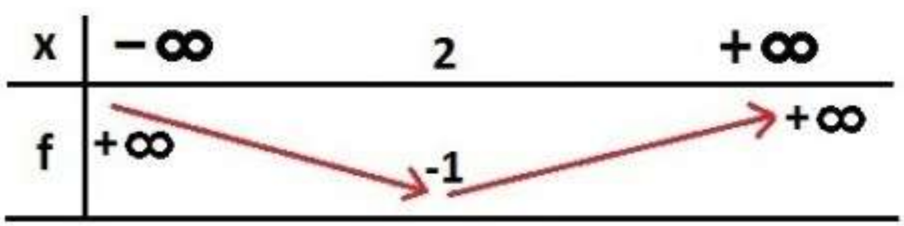
Or

$$\lim_{x \to -\infty} x^2 - 4x + 3 = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 - 4x + 3 = +\infty$$

Il ne reste plus qu'à compléter :



Voilà c'est tout, il n'y a aucune difficulté à ce niveau-là

Une dernière remarque avant de clore le chapitre : une limite n'existe pas toujours !!
Prenons par exemple :

$$\lim_{x \to +\infty} cos(x)$$

Et bien cette limite n'existe pas, il n'y a qu'à penser à la courbe de la fonction cosinus (en gros des vagues) pour voir que la fonction ne tend vers rien du tout.

—